BACCALAUREAT BLANC TES

durée 4 heures **Calculatrice autorisée**

Sujet spécialité

Dans ce devoir toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.
L'énoncé n'est pas à rendre avec la copie si ce n'est les annexes éventuelles.

Exercice 1 (élève ayant suivi l'enseignement de spécialité) (4,5 points)

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes qui peuvent être traitées séparément.

Partie A

Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et le parcours de bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.

Calculer la longueur de chacun des trois parcours en expliquant clairement votre démarche.

Partie B

Dans une zone de marais, on s'intéresse à la population des libellules.
On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de *n* années.
Des études ont permis de modéliser l'évolution P_n par la relation suivante :

Pour tout entier naturel *n*, on a : $P_{n+2} = \frac{3}{2}P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n$

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$

1) Calculer P_2 et P_3.

2) On considère pour tout entier naturel *n* la matrice colonne V_n définie ci-dessous :

$$V_n = \begin{pmatrix} P_n \\ P_{n+1} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel *n* :

$V_{n+1} = A \times V_n$ où *A* est une matrice carrée d'ordre 2 à préciser.

b) Soit *P* et *D* les matrices : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Déterminer l'inverse de *P* à la calculatrice et vérifier à la main que : $A = PDP^{-1}$.

c) En admettant que les puissances de la matrice *D* se déterminent en calculant les puissances des éléments de la diagonale principale, démontrer que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 & -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

d) On admet que le résultat de la question a) permet d'affirmer que, pour tout entier naturel *n*, $V_n = A^n \times V_0$
Déterminer alors l'expression de P_n fonction de *n*.

3) a) Déterminer la limite de la suite (P_n)

b) Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de la population de libellules au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Exercice 2 (commun à tous les élèves) (5 points)

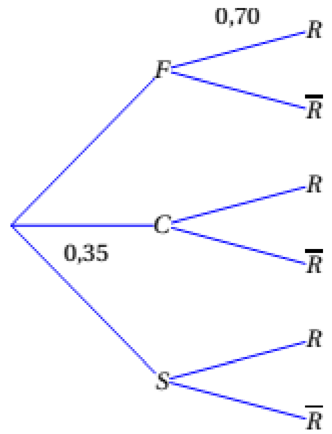
Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.
Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.
On s'intéresse aux évènements suivants :
F : « la table est occupée par une famille »
S : « la table est occupée par une personne seule »
C : « la table est occupée par un couple »
R : « le serveur reçoit un pourboire »
On note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A, sachant B .

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités p (F) et $P_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. a. Calculer p (F ∩ R).
   b. Déterminer p (R).
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienned'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3}

.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.
On admet que X suit la loi normale d'espérance μ = 15 et d'écart-type σ = 4,5.
Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2}

1. Calculer :
   a. la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
   b. $P(X \geq 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros

.

Exercice 3 (commun à tous les élèves) (5 points)

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.
On modélise le coût total de production par une fonction C.
Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.
La courbe représentative de la fonction C est donnée **en annexe**.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

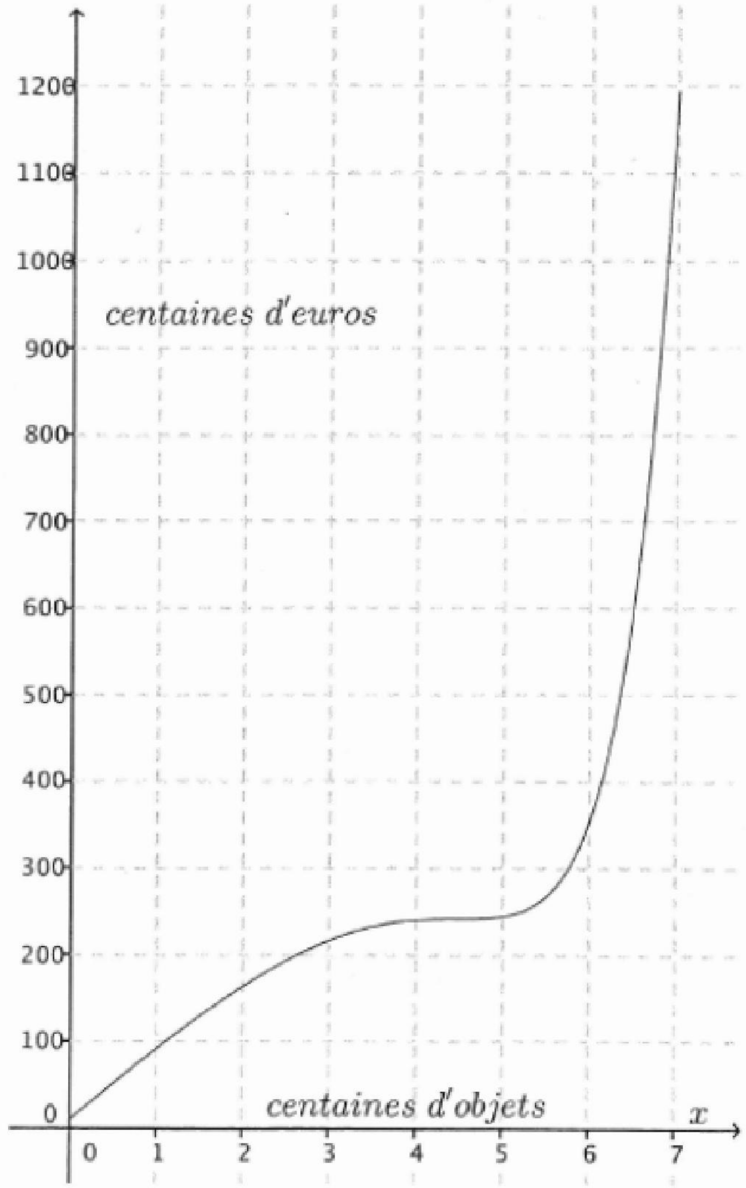
1. Quel est le coût total de production pour 450 objets?
2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60000 euros ?
3. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.
    a. Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.
    b. Que pensez-vous de l'affirmation << le coût marginal est croissant sur l'intervalle [0 ; 7] ?

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle [0;7], $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
   Représenter la fonction r dans 1e repère donné en annexe.
2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.
    a. En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise,la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.
    b. Que penser de l'affirmation : << il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets > ?

Annexe exercice 3



Exercice 4 (commun à tous les élèves)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(-4x^2+5\right)\mathrm{e}^{-x}+3$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \left(4x^2-8x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$$

   b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. a) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) = -\dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{5}{\mathrm{e}^x}+3$.
   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$).
   c) Interpréter graphiquement cette limite.
3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

PARTIE B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue.
Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :
pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5\,;\,8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.
Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. a) Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
   b) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
   On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
   Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?